1.12. Proposition: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich.

Beweis

$$\mathbb{Q} = \{(p,q) : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ ggT(p,q) = 1\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

Definiere: $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — bijektiv mit

$(\bar{f}_1(p), q)$ $\quad (f_2(\bar{f}_1(p), q)$

$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $\bar{f}_1(n) = f_1^{-1}(f_4^{-1}(n))$ (Aus Bsp. Def. 1.11.)

(Dienstag, 13.03.18)

1) $\mathbb{Q}$ hat unendlich viele Elemente, da $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

2) Da $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ ggT(p,q) = 1\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

z.z. $\exists\, f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv

3) $\exists\, h: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv (voriges Beispiel)

Also..
z.z. $\exists\, g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv

Beweis (von Cantor)

1. Schritt: ordne die Paare $(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

1 Paar $(1,1); (1,2); (1,3) \dots (1,n); (1,n+1) \dots$

2 Paare $(2,1); (2,2); \dots \dots (2,n); \dots$

$(3,1), \dots$

$\vdots$

n Paare $(n,1) \dots \quad (k,l)$

$(n+1,1) \dots$

auf der $(n+1)$-ten Diagonale gilt $k+l = n+2$ *
$\Leftrightarrow n = k+l-2$

2. Schritt: auf den ersten n Diagonalen sind

$$1+2+3+\dots+n = \sum_{j=1}^{n} j \underset{\text{vollständige Induktion}}{=} \frac{1}{2} n(n+1) \quad \text{(Paare)}$$

3. Schritt: definiere $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$g(k,l) = \frac{1}{2} n(n+1) + k^* =$$

$$\frac{1}{2}(k+l-2)(k+l-1) + k$$

Diese Abbildung g ist bijektiv nach Konstruktion

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 4 & 2 & 0 & 1 & 3 & \\
\ldots & -(1,2) & -(1,1) & 0 & (1,1) & (1,2) & (1,3) \ldots \\
 & & 6 & & 5 & & \\
 & \ldots & -(2,1) & \vdots & (2,1) & (2,2) \ldots &
\end{array}$$

Jedem Zahlenpaar kann eine natürliche Zahl zugeordnet werden $\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind „gleich groß"

2. Folgen, Reihen und reelle Zahlen

$(K, +, \cdot)$ ist ein archimedischer Körper

2.1. Definition: Eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to K$ heißt Folge

2.2 Definition: (Cauchy 1821) Eine Folge $a : \mathbb{N} \to K$ heißt konvergent in K gegen den Grenzwert (Zahl) $A \in K$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a(n) - A| < \varepsilon$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen alle $a(n), a(n+1), a(n+2) \ldots$ im Intervall $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ $(n \geq n_\varepsilon)$

Beispiele:

Zeige, dass die Folge $a: \mathbb{N} \to K$ gegen $A \in K$ konvergiert

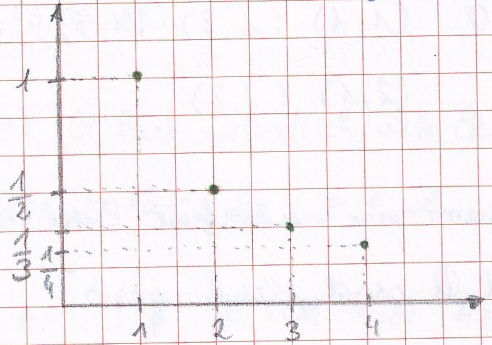
(i) Die Folge $a = \left(a(n) = \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

konvergiert gegen $A = 0$, denn

$$\forall \varepsilon > 0 : \underbrace{\exists n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}}_{*} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a(n) - A| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$$

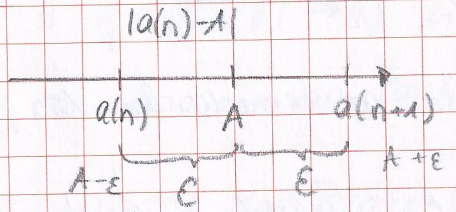
d. h. $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$

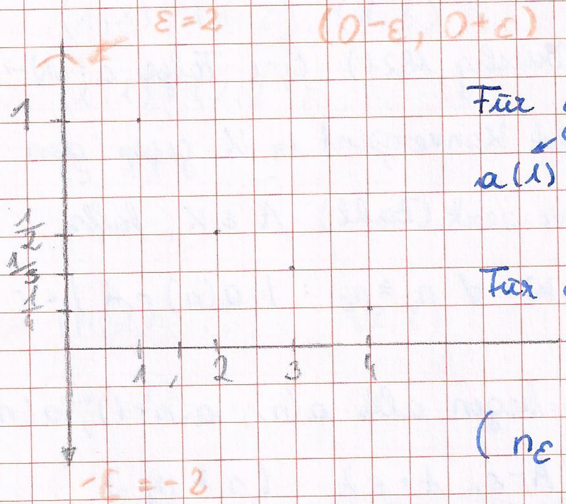
Graphisch:



* So ein $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ existiert, da $(K, +, \cdot)$ ein archimedischer Körper ist.

Beachte: $|a(n) - A| < \varepsilon \iff a(n) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$





Für $\varepsilon = 2 > 0$ liegen alle $\overset{(n_\varepsilon)}{a(1)}$, $a(2)$, ... im Intervall $(-2, 2)$

Für $\varepsilon = 2 > 0$ liegen alle $\overset{(n_\varepsilon)}{a(2)}$, $a(3)$, ... im Intervall $(-2, 2)$

(n_ε ist wählbar)

Für $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$ liegen alle $a(4)$, $a(5)$, ...

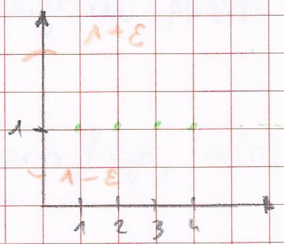
im Intervall $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Konvergenz: Grenzwert als eine Grenze

(ii) Die konstante Folge $a = (a(n) = 1)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $A = 1$, denn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \geq 1 : \forall n \geq n_\varepsilon : |\underbrace{1}_{a(n)} - \underbrace{1}_{A}| = 0 < \varepsilon$$

Graphisch:



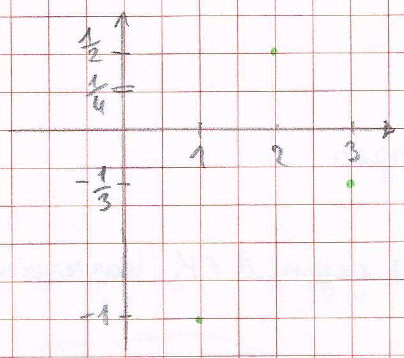
$a(1) = a(2) = \ldots$

$\nwarrow n_\varepsilon$

Beobachtung: Für alle konstanten Folgen $a = (a(n) = c)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $A = c$.

(iii) Die Folge $a = (a(n) = (-1)^n \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0

denn,
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a(n) - 0| = |(-1)^n \tfrac{1}{n}| = \underbrace{|(-1)^n|}_{=1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$$



[Später: Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt; d.h.
$\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |a(n)| < C$.

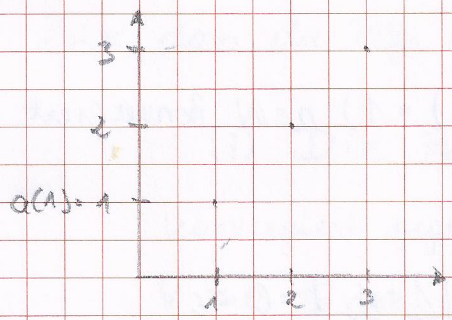
Beispiele (Divergenz)

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_\varepsilon : |a(n) - A| \geq \varepsilon$$

(i) Die Folge $a = (a(n) = n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert, denn a ist unbeschränkt, d.h.

$$\forall C > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : |a(n)| \geq C$$

Graphisch:



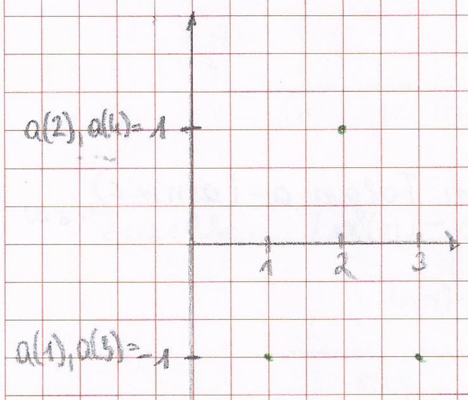
In diesem Fall:

$$\forall C > 0 : \exists \overset{(2)}{n \geq C} : |a(n)| = \overset{(1)}{n \geq C}$$

aus der Definition

dann wird erst n gewählt.

(ii) Die Folge $a = (a(n) = (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert, denn



Häufungspunkte sind

$+1$: da $(a(2n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert

-1 : da $(a(2n-1))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen -1 konvergiert.

Satz: Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

Bezeichnungen + Bemerkungen

(i) Falls $a = (a(n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $A \in K$ konvergiert, schreibt man

$$\lim_{n \to \infty} a(n) = A$$

$\neq \infty$
denn ∞ ist keine Zahl

(ii) Falls die Folge $a = (a(n))_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergiert

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_\varepsilon : |a(n) - A| \geq \varepsilon$$

dann sagt man, dass a divergiert.

(iii) Eine Folge heißt Nullfolge, falls $\lim_{n\to\infty} a(n) = 0$

2.3. Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt
$(\exists C>0 : \forall n\in\mathbb{N} : |a(n)| \le C)$

Beweis: $\lim_{n\to\infty} a(n) = A \iff \forall \varepsilon>0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_\varepsilon : |a(n) - A| < \varepsilon$

$|a(n)| - |A| \le |a(n) - A| < \varepsilon$

und $M = \max\{|a(n)| : n < n_\varepsilon\}$

implizieren
$$|a(n)| \le \begin{cases} M & n < n_\varepsilon \\ |A| + \varepsilon & n \ge n_\varepsilon \end{cases}$$

Daraus folgt, $|a(n)| \le C = M + |A| + \varepsilon$ für alle $n\in\mathbb{N}$

Ort / Place

Datum / Date

Uhrzeit / Time